تحليل 2 نظري

« المحاضرة النظرية الرابعة »

النموذج الثالث:

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

أو

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

{ لأنه لدينا تابع أسي مضروب بـ sin أو cos نكامل بالتجزئة مرتين حتى نحصل على نفس التكامل المطلوب I }

في هذه الحالة نفرض $u = e^{ax}$ والباقي هو dv

<u>مثال</u> : $I = \int e^{x} \sin x \, dx$

نستخدم التكامل بالتجزئة نفرض أن

$du = e^{x} dx \Leftarrow u = e^{x}$

$v = -\cos x \Leftarrow dv = \sin x \, dx$

$$\Rightarrow I = -e^{x} \cos x + \int e^{x} \cos x \, dx$$

عوضنا في القانون مباشرة ↑

نكامل مرة ثانية بالتجزئة ← $\int e^{x} \cos x$ بفرض

$du = e^{x} dx \Leftarrow u = e^{x}$

$v = \sin x \Leftarrow dv = \cos x \, dx$

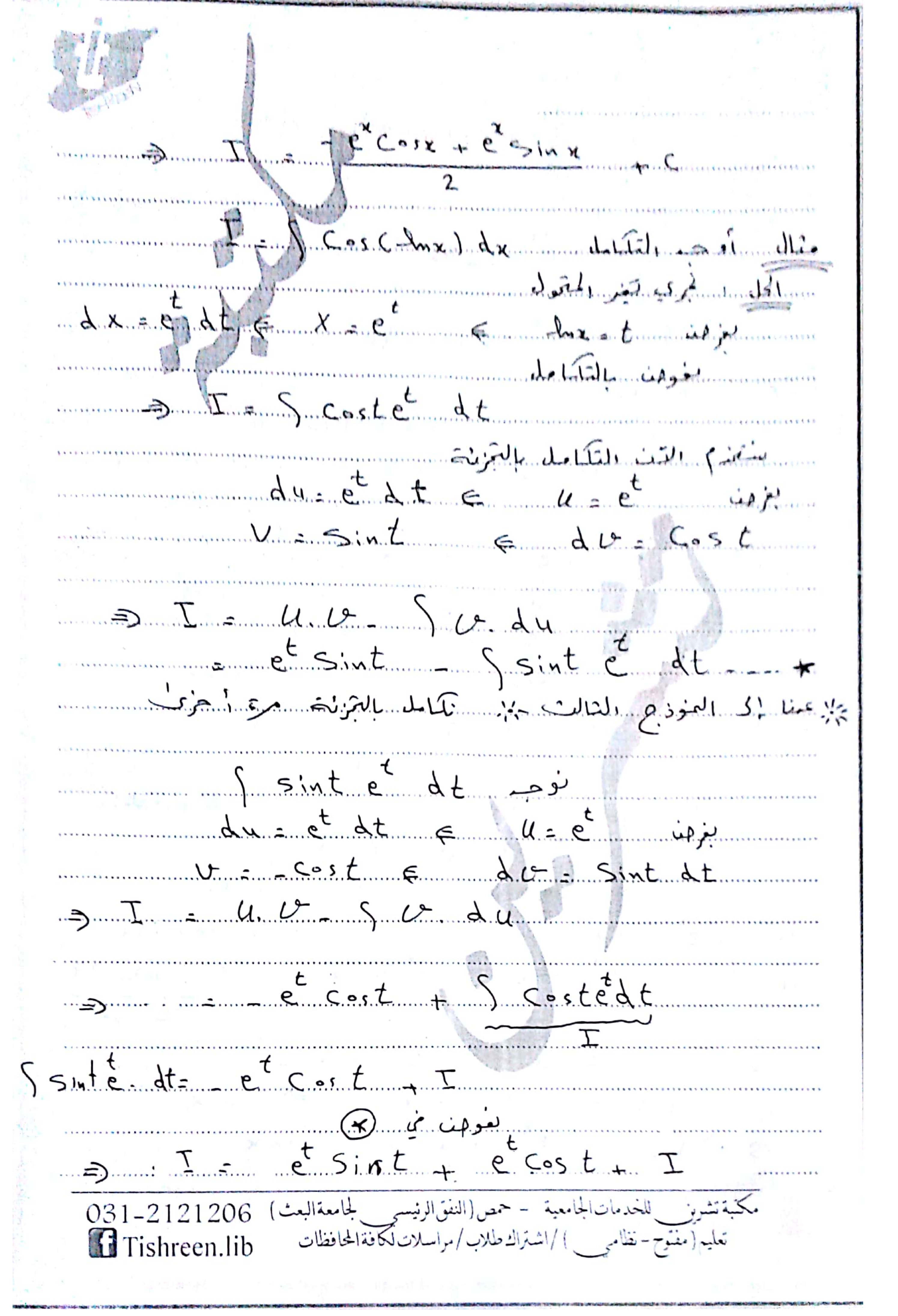
$$\Rightarrow \int e^{x} \cos x = e^{x} \sin x - \int e^{x} \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow I = -e^{x} \cos x + e^{x} \sin x - \underbrace{\int e^{x} \sin x \, dx}_{\text{هو } I}$$

$$\Rightarrow I = -e^{x} \cos x + e^{x} \sin x - I$$

$$\Rightarrow I + I = -e^{x} \cos x + e^{x} \sin x$$

$$\Rightarrow 2I = -e^{x} \cos x + e^{x} \sin x$$



$$\Rightarrow I = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c$$

مثال أوجد التكامل $I = \int \cos(\ln x)\, dx$

الحل: نجري تغير المتحول

نفرض $\ln x = t \Leftarrow x = e^t \Leftarrow dx = e^t dt$

نعوض بالتكامل

$$\Rightarrow I = \int \cos t \, e^t \, dt$$

نستخدم التكامل بالتجزئة

نفرض $u = e^t \Leftarrow du = e^t dt$

$dv = \cos t \Leftarrow v = \sin t$

$$\Rightarrow I = u.v - \int v.\, du$$

$$= e^t \sin t - \int \sin t \, e^t \, dt \; --- \star$$

عدنا إلى النموذج الثالث ⁂ نكامل بالتجزئة مرة أخرى

نوجد $\int \sin t \, e^t \, dt$

نفرض $u = e^t \Leftarrow du = e^t dt$

$dv = \sin t \, dt \Leftarrow v = -\cos t$

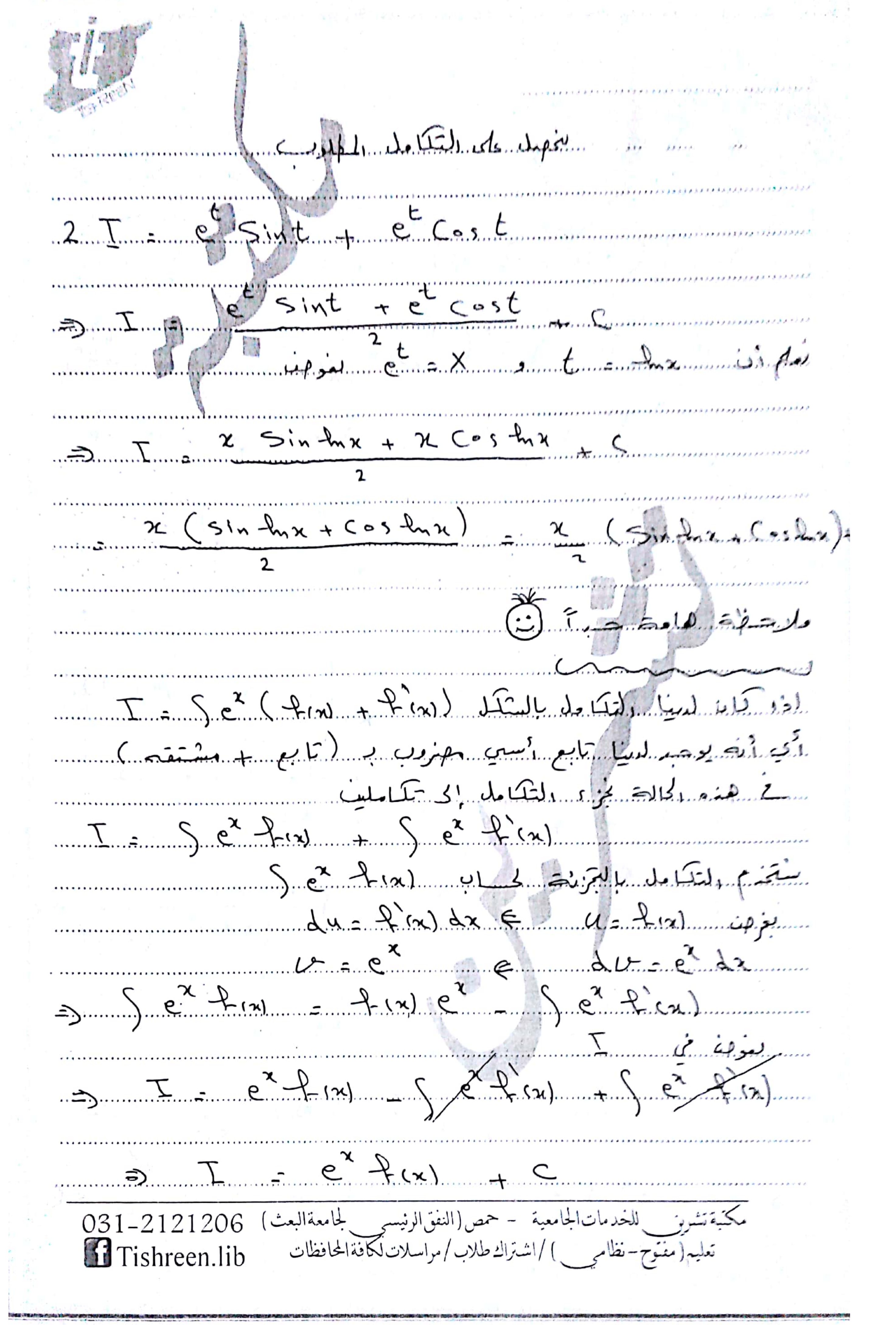
$$\Rightarrow I = u.v - \int v.\, du$$

$$\Rightarrow \; = -e^t \cos t + \underbrace{\int \cos t \, e^t dt}_{I}$$

$$\int \sin t \, e^t . dt = -e^t \cos t + I$$

نعوض في $\star$

$$\Rightarrow I = e^t \sin t + e^t \cos t + I$$



نحصل على التكامل المطلوب

$$2I = e^t \sin t + e^t \cos t$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{2} + c$$

نعلم أن $t = \ln x$ و $e^t = X$ نعوض

$$\Rightarrow I = \frac{x \sin \ln x + x \cos \ln x}{2} + c$$

$$= \frac{x(\sin \ln x + \cos \ln x)}{2} = \frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x) + c$$

ملاحظة هامة جداً

إذا كان لدينا التكامل بالشكل $I = \int e^x (f(x) + f'(x))$

أي أنه يوجد لدينا تابع أسي مضروب ب (تابع + مشتقه)

في هذه الحالة نجزئ التكامل إلى تكاملين

$$I = \int e^x f(x) + \int e^x f'(x)$$

نستخدم التكامل بالتجزئة لحساب $\int e^x f(x)$

نفرض $u = f(x) \Leftarrow du = f'(x)\,dx$

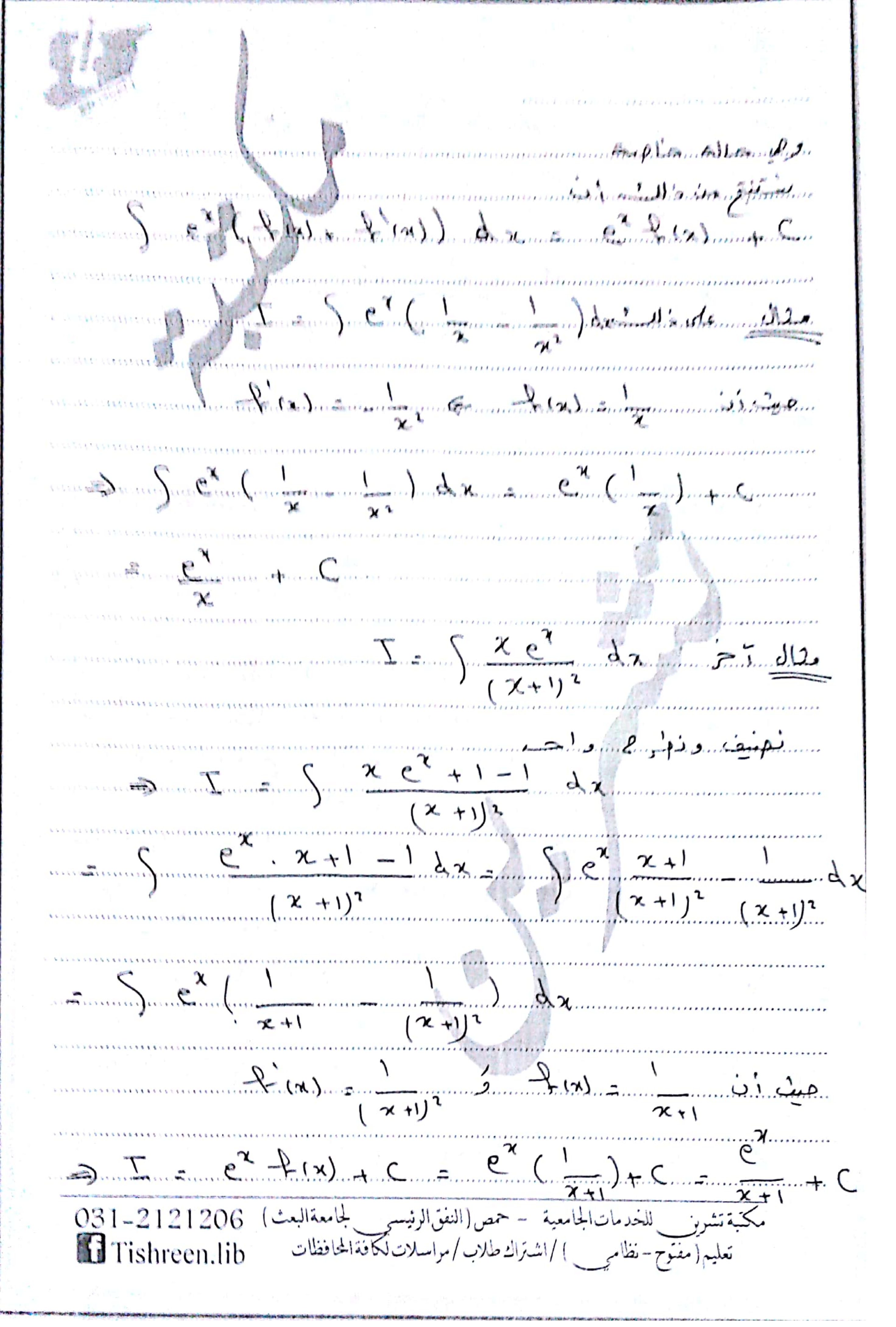
$dv = e^x\,dx \Leftarrow v = e^x$

$$\Rightarrow \int e^x f(x) = f(x)e^x - \int e^x f'(x)$$

نعوض في I

$$\Rightarrow I = e^x f(x) - \int e^x f'(x) + \int e^x f'(x)$$

$$\Rightarrow I = e^x f(x) + c$$



ومنه القاعدة العامة

نستنتج من هذه المسألة أن

$$\int e^{x}\left(f(x)+f'(x)\right)dx = e^{x}f(x)+C$$

مثال: احسب التكامل $I=\int e^{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}\right)$

حيث أن $f(x)=\frac{1}{x} \Leftarrow f'(x)=-\frac{1}{x^{2}}$

$$\Rightarrow \int e^{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}\right)dx = e^{x}\left(\frac{1}{x}\right)+C$$

$$=\frac{e^{x}}{x}+C$$

مثال آخر: $I=\int \frac{x e^{x}}{(x+1)^{2}}\,dx$

نضيف ونطرح واحد

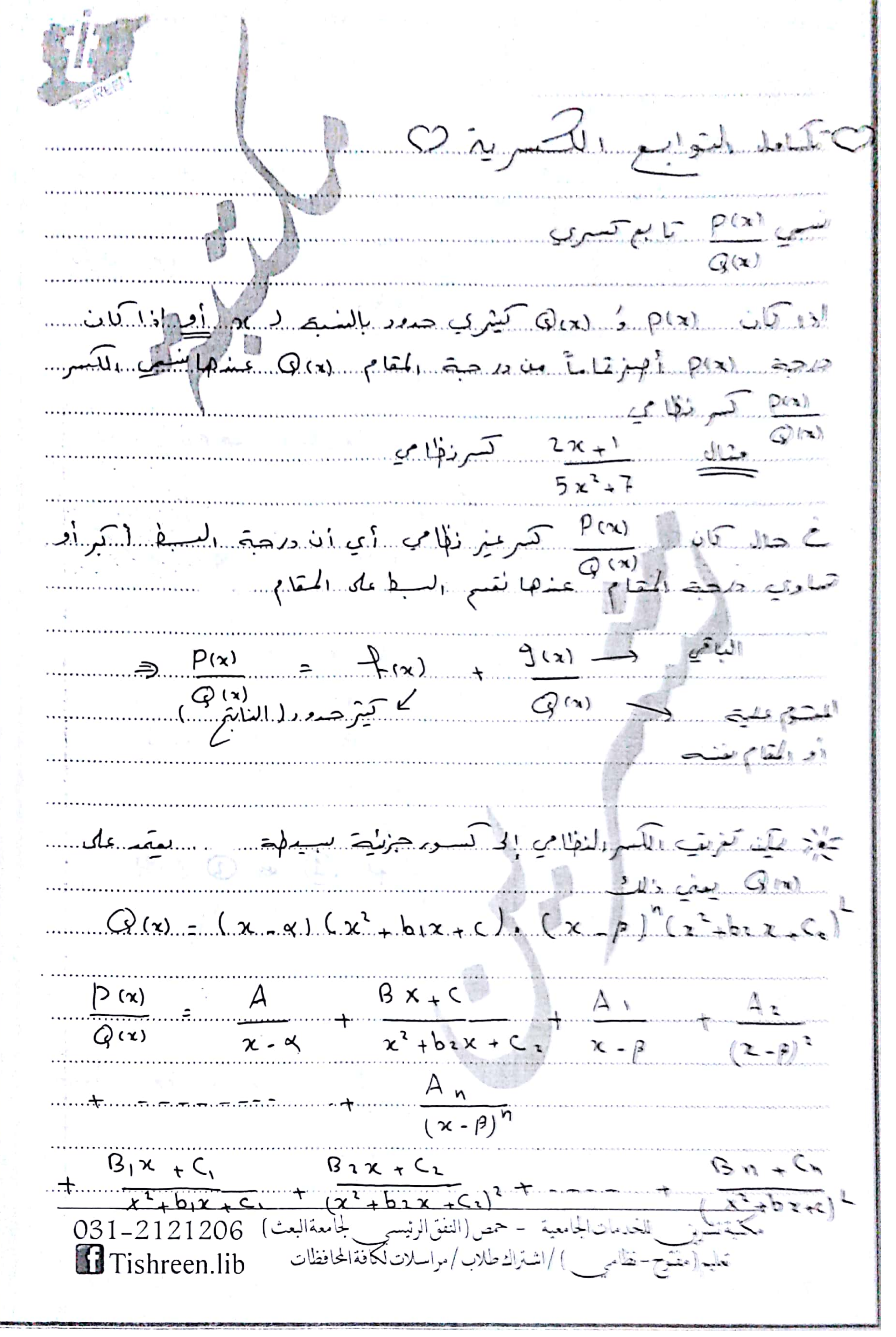
$$\Rightarrow I=\int \frac{x e^{x}+1-1}{(x+1)^{2}}\,dx$$

$$=\int \frac{e^{x}.\,x+1-1}{(x+1)^{2}}\,dx=\int e^{x}\,\frac{x+1}{(x+1)^{2}}-\frac{1}{(x+1)^{2}}\,dx$$

$$=\int e^{x}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^{2}}\right)dx$$

حيث أن $f(x)=\frac{1}{x+1}$ و $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^{2}}$

$$\Rightarrow I=e^{x}f(x)+C=e^{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)+C=\frac{e^{x}}{x+1}+C$$



تكامل التوابع الكسرية

نسمي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تابع كسري

إذا كان $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود بالنسبة لـ x أو إذا كانت درجة $P(x)$ أصغر تماماً من درجة المقام $Q(x)$ عندها نسمي الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ كسر نظامي

مثال: $\frac{2x+1}{5x^2+7}$ كسر نظامي

في حال كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ كسر غير نظامي أي أن درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام عندها نقسم البسط على المقام

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{g(x)}{Q(x)}$$

$g(x)$ ← الباقي

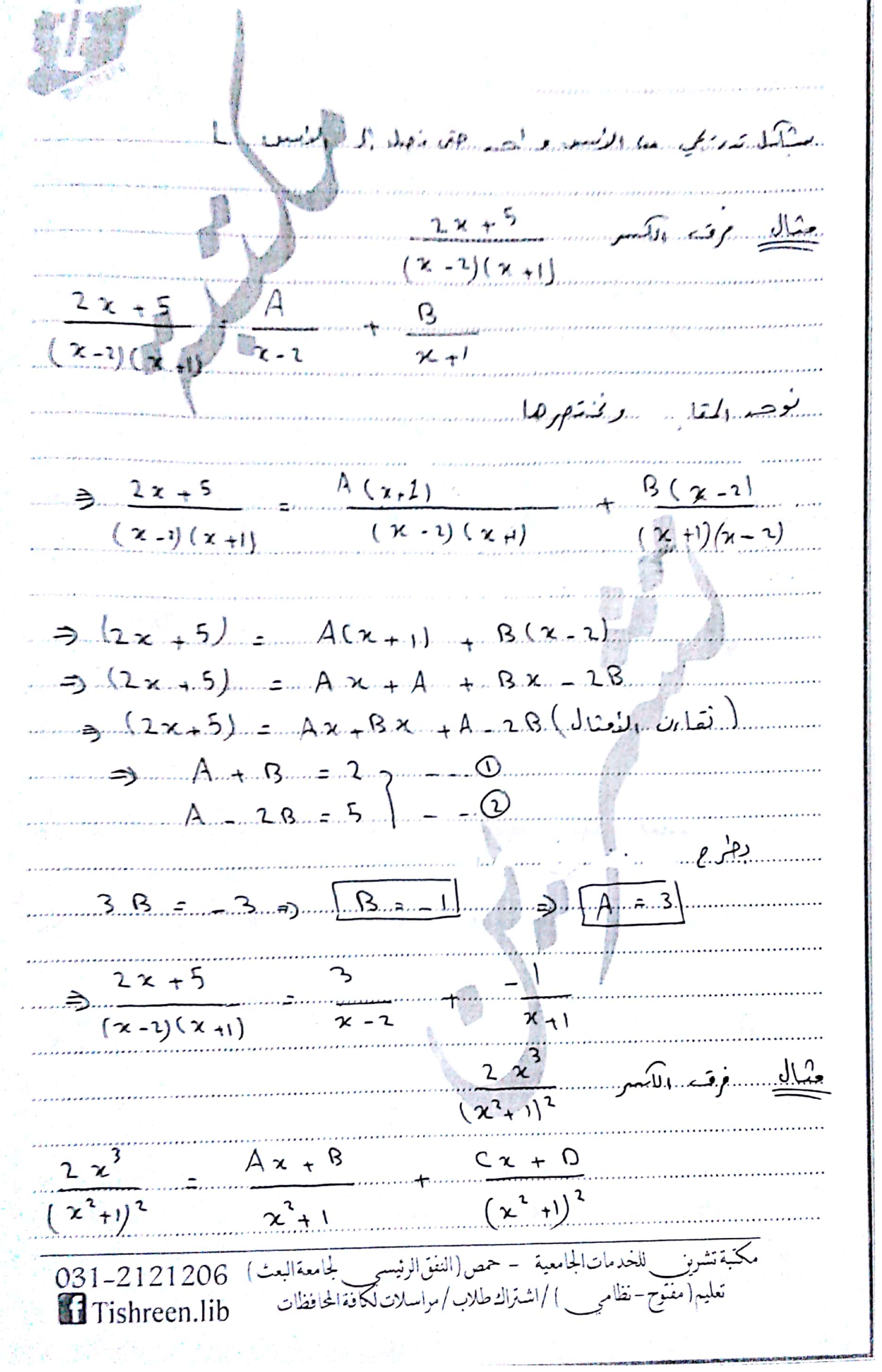
$Q(x)$ ← المقسوم عليه أو المقام نفسه

$f(x)$ ← كثير حدود (الناتج)

يمكن تفريق الكسر النظامي إلى كسور جزئية بسيطة يعتمد على $Q(x)$ يعني ذلك

$$Q(x) = (x-\alpha)(x^2+b_1x+c_1)(x-\beta)^n(x^2+b_2x+c_2)^L$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_1}{x-\beta} + \frac{A_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-\beta)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + \dots + \frac{B_n x+C_n}{(x^2+b_2x+c_2)^L}$$



بشكل تدريجي حلا الأسس و احصر حتى نصل إلى الأساس L

مثال فرّق الكسر $\dfrac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$

$$\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

نوحد المقام ونختصرها

$$\Rightarrow \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{A(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{B(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow (2x+5) = A(x+1) + B(x-2)$$

$$\Rightarrow (2x+5) = Ax + A + Bx - 2B$$

$$\Rightarrow (2x+5) = Ax + Bx + A - 2B$$ (نقارن الأمثال)

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 2 & \text{--- (1)} \\ A - 2B = 5 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

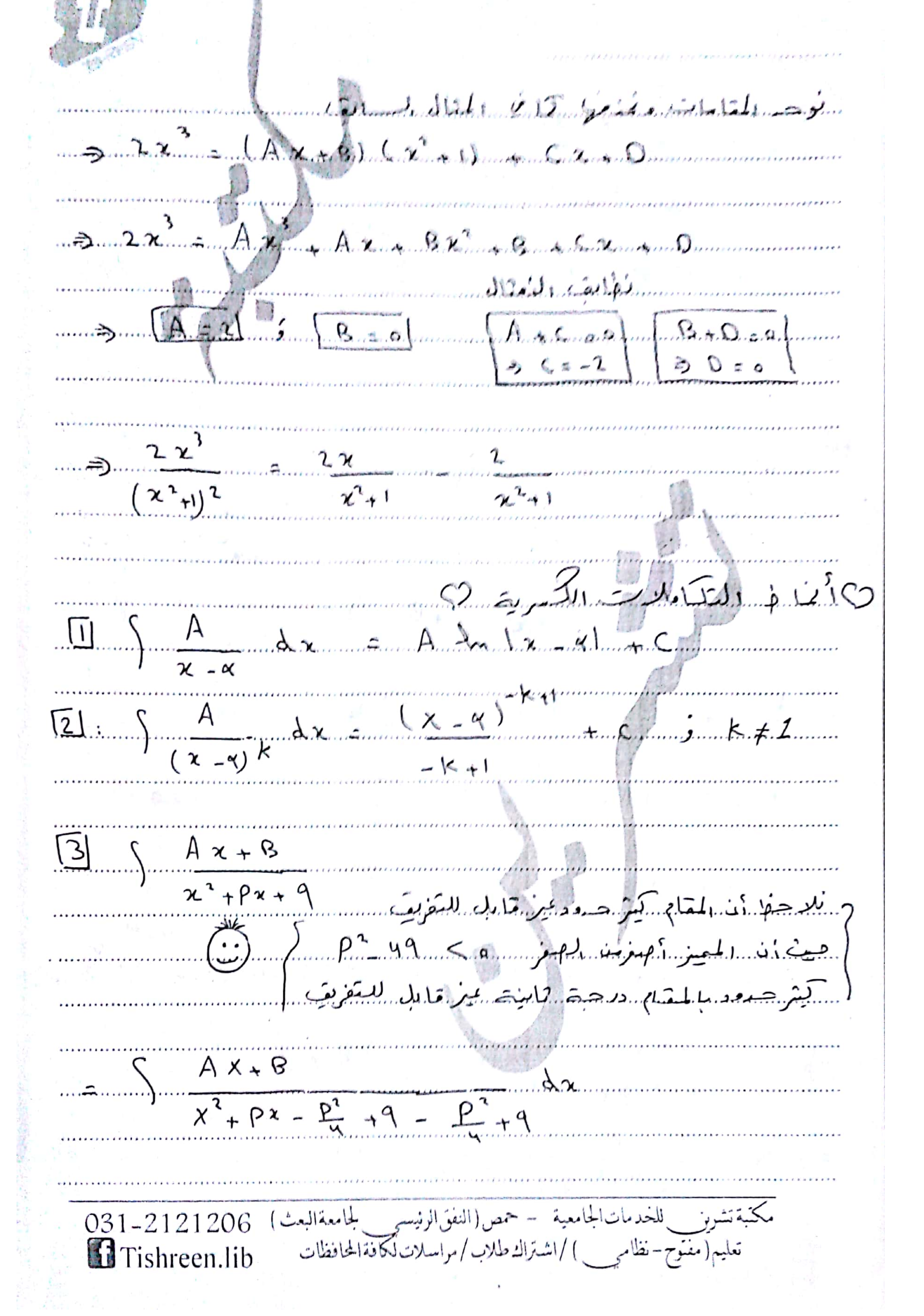
بالطرح

$$3B = -3 \Rightarrow \boxed{B = -1} \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} + \frac{-1}{x+1}$$

مثال فرّق الكسر $\dfrac{2x^3}{(x^2+1)^2}$

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$



نوحد المقامات ونحذفها كما في المثال السابق

$\Rightarrow 2x^3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$

$\Rightarrow 2x^3 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D$

نطابق الأمثال

$\Rightarrow \boxed{A = 2}$; $\boxed{B = 0}$ $\boxed{A + C = 0 \Rightarrow C = -2}$ $\boxed{B + D = 0 \Rightarrow D = 0}$

$\Rightarrow \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}$

♡ أنماط التكاملات الكسرية ♡

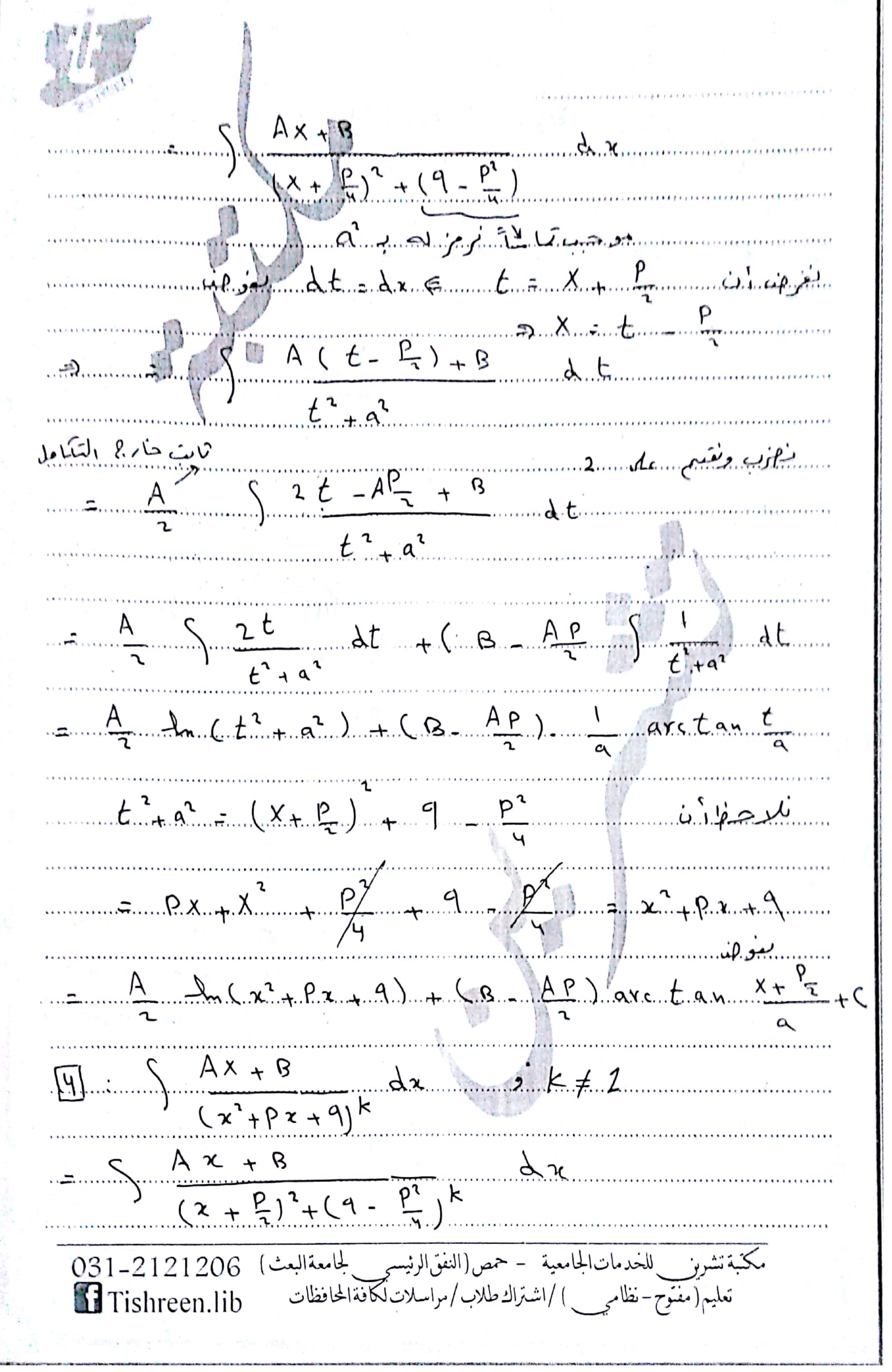
1) $\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A \ln|x-\alpha| + C$

2) $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx = \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + C$; $k \neq 1$

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

نلاحظ أن المقام كثير حدود غير قابل للتفريق
حيث أن المميز أصغر من الصفر $p^2 - 4q < 0$
كثير حدود بالمقام درجة ثانية غير قابل للتفريق

$= \int \frac{Ax+B}{x^2+px-\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}+q}\,dx$



$$\int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\,dx$$

$\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ موجب تماماً نرمز له بـ a^2

نفرض أن $t = x + \frac{p}{2}$ ⇐ $dt = dx$ نعوض

⇐ $x = t - \frac{p}{2}$

$$\Rightarrow \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}\,dt$$

نضرب ونقسم على 2

ثابت خارج التكامل ← $\frac{A}{2}$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2t-A\frac{p}{2}+B}{t^2+a^2}\,dt$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2t}{t^2+a^2}\,dt + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}$$

نلاحظ أن

$$t^2+a^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

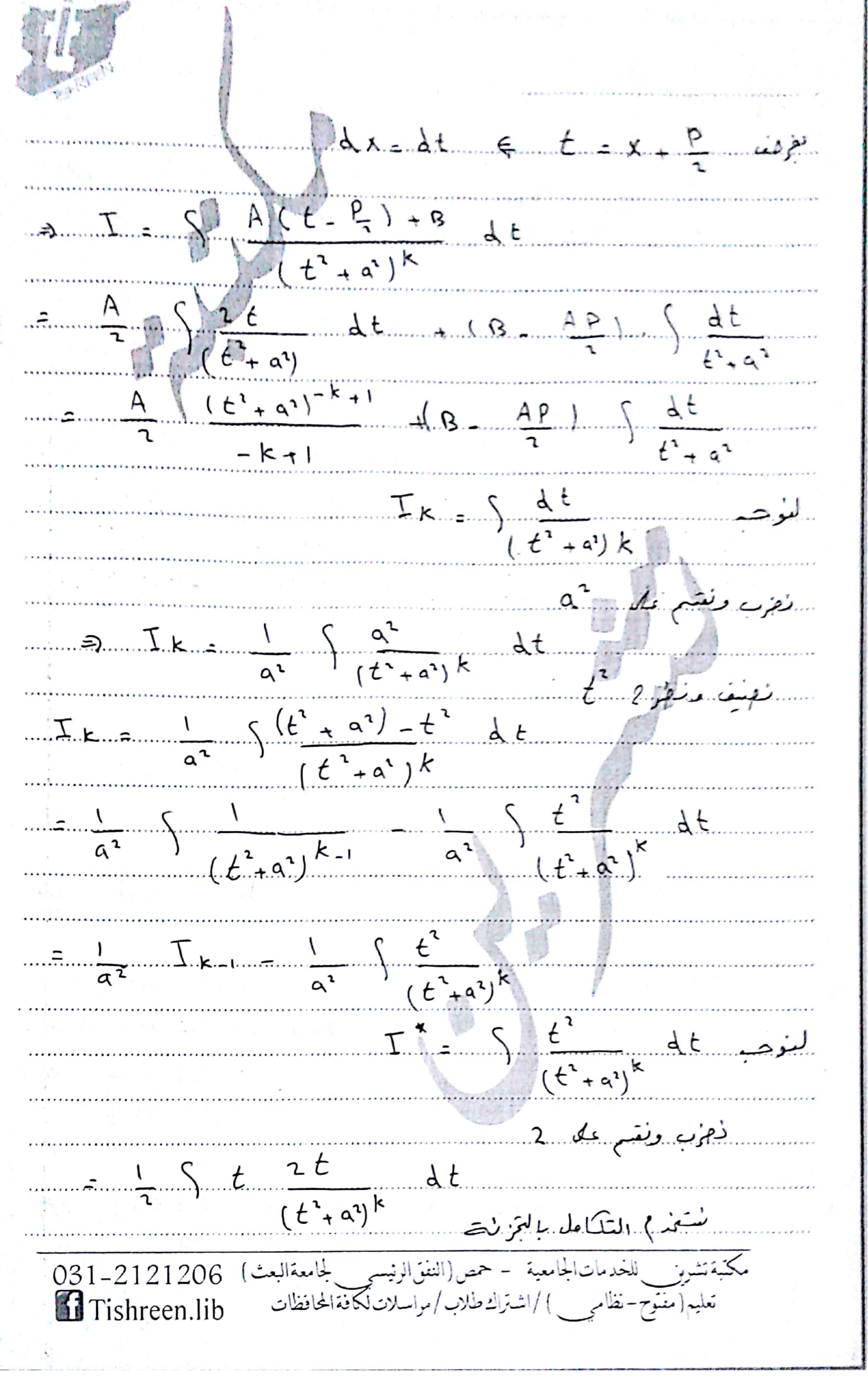
$$= px + x^2 + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = x^2+px+q$$

نعوض

$$= \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C$$

4 : $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx \quad ; k \neq 1$

$$= \int \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}\,dx$$



نعرّف $t = x + \frac{p}{2}$ و $dx = dt$

$$\Rightarrow I = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{(t^2+a^2)^k}\, dt$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)}\, dt + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{A}{2}\, \frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}$$

لنوجد $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$

نضرب ونقسم على a^2

$$\Rightarrow I_k = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(t^2+a^2)^k}\, dt$$

نضيف ونطرح t^2

$$I_k = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\, dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\, dt$$

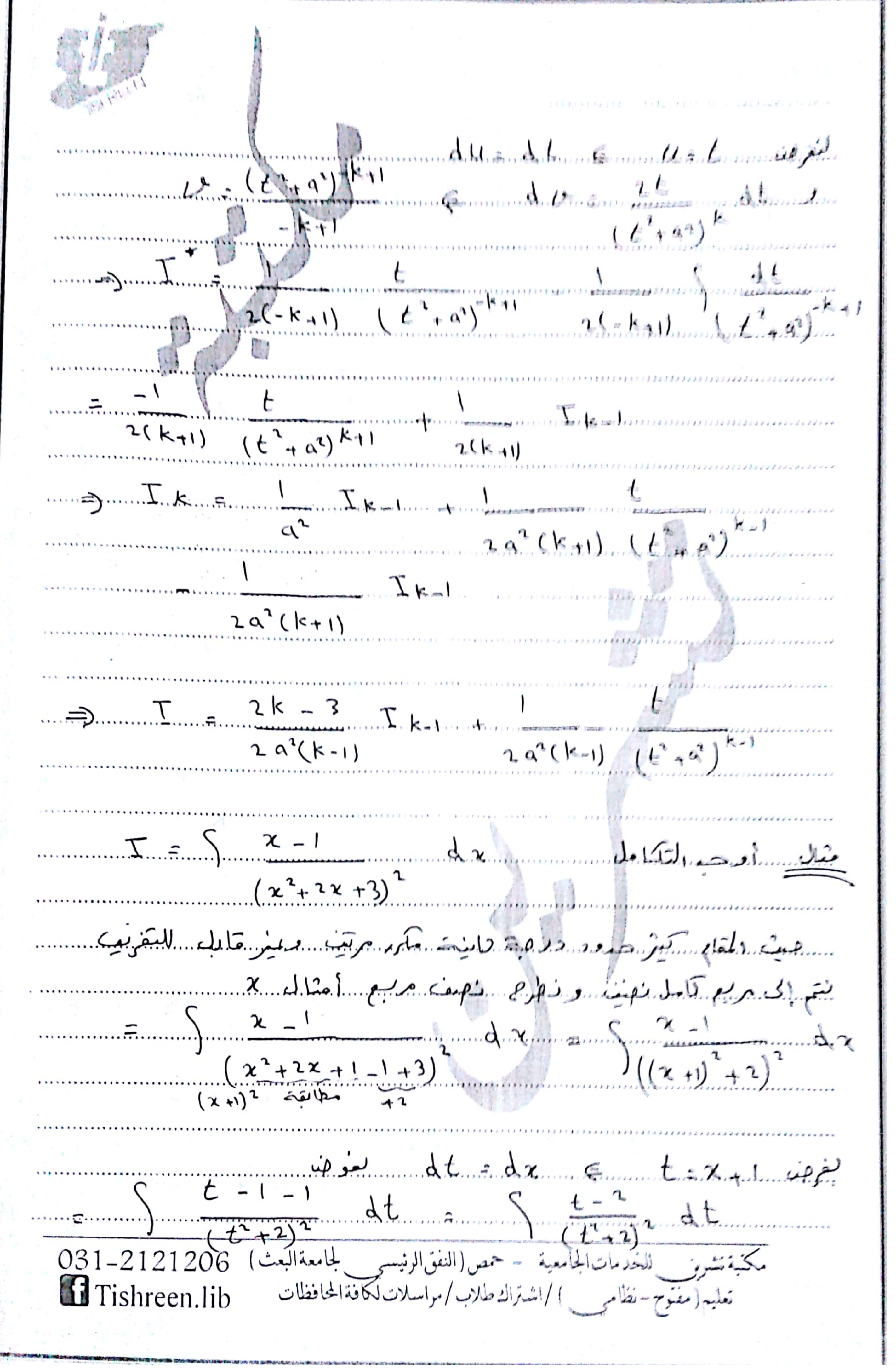
$$= \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}$$

لنوجد $I^* = \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\, dt$

نضرب ونقسم على 2

$$= \frac{1}{2} \int t\, \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}\, dt$$

نستخدم التكامل بالتجزئة



لنفرض $u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}\, dt \Rightarrow v = \frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}$

$$\Rightarrow I^* = \frac{1}{2(-k+1)} \frac{t}{(t^2+a^2)^{-k+1}} \quad \frac{1}{2(-k+1)} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{-k+1}}$$

$$= \frac{-1}{2(k+1)} \frac{t}{(t^2+a^2)^{k+1}} + \frac{1}{2(k+1)} I_{k-1}$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{1}{a^2} I_{k-1} + \frac{1}{2a^2(k+1)} \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}}$$

$$- \frac{1}{2a^2(k+1)} I_{k-1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1} + \frac{1}{2a^2(k-1)} \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}}$$

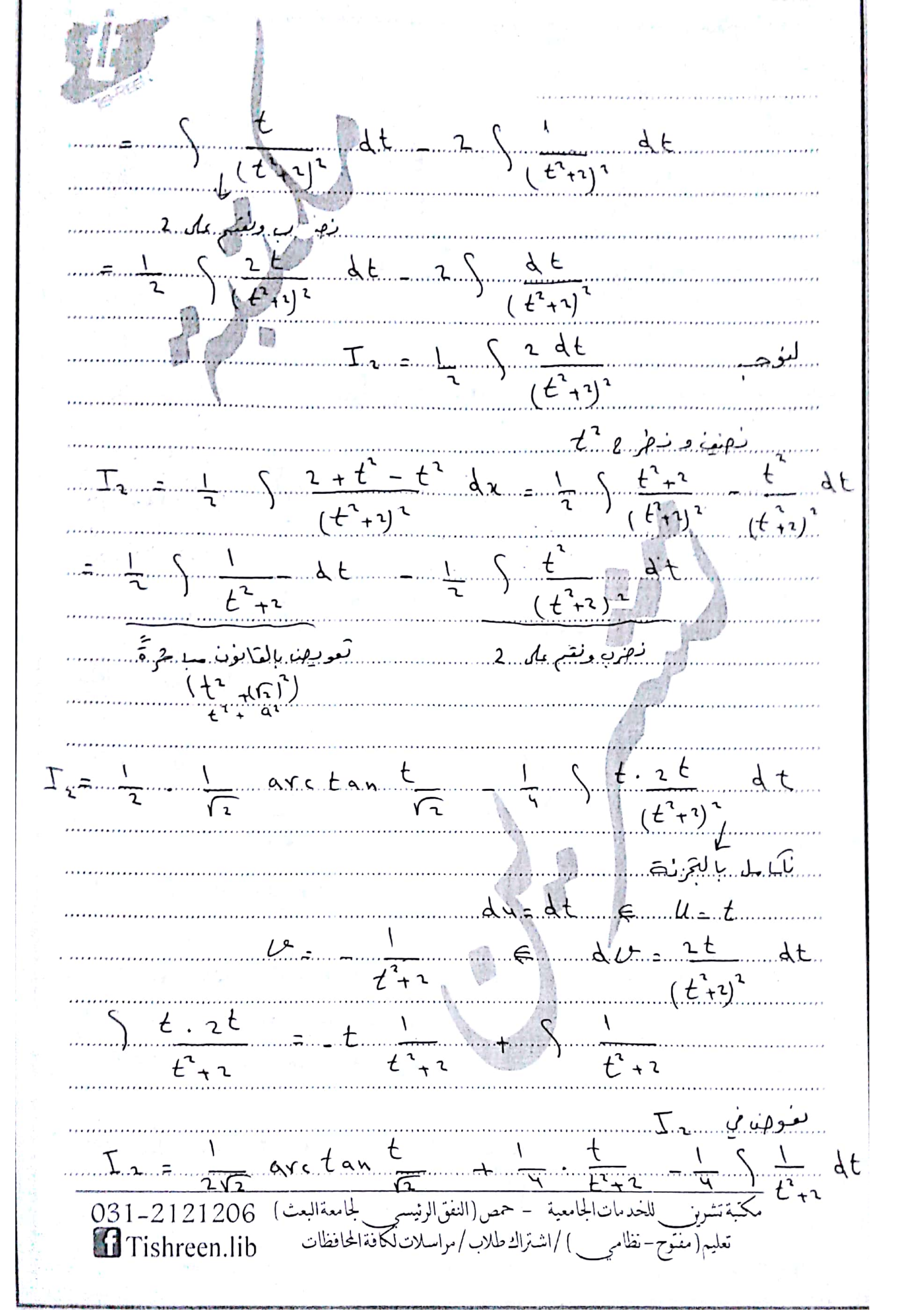
مثال أوجد التكامل $I = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx$

حيث المقام يحوي حدود درجة ثانية مكرر مرتين غير قابل للتفريق
نتمم إلى مربع كامل نضيف ونطرح نصف مربع أمثال x

$$= \int \frac{x-1}{(\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2 \text{ مطابقة}} \underbrace{-1+3}_{+2})^2}\, dx = \int \frac{x-1}{((x+1)^2+2)^2}\, dx$$

نفرض $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$ نعوض

$$= \int \frac{t-1-1}{(t^2+2)^2}\, dt = \int \frac{t-2}{(t^2+2)^2}\, dt$$



$$= \int \frac{t}{(t^2+2)^2}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+2)^2}\,dt$$

نضرب ونقسم على 2

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+2)^2}\,dt - 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2}$$

لنوجد $I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dt}{(t^2+2)^2}$

نضيف ونطرح t^2

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2+t^2-t^2}{(t^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2}{(t^2+2)^2} - \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+2}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt$$

تعويض بالقانون مباشرة $(t^2+(\sqrt{2})^2)$ t^2+a^2 — نضرب ونقسم على 2

$$I_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\int \frac{t\cdot 2t}{(t^2+2)^2}\,dt$$

تكامل بالتجزئة

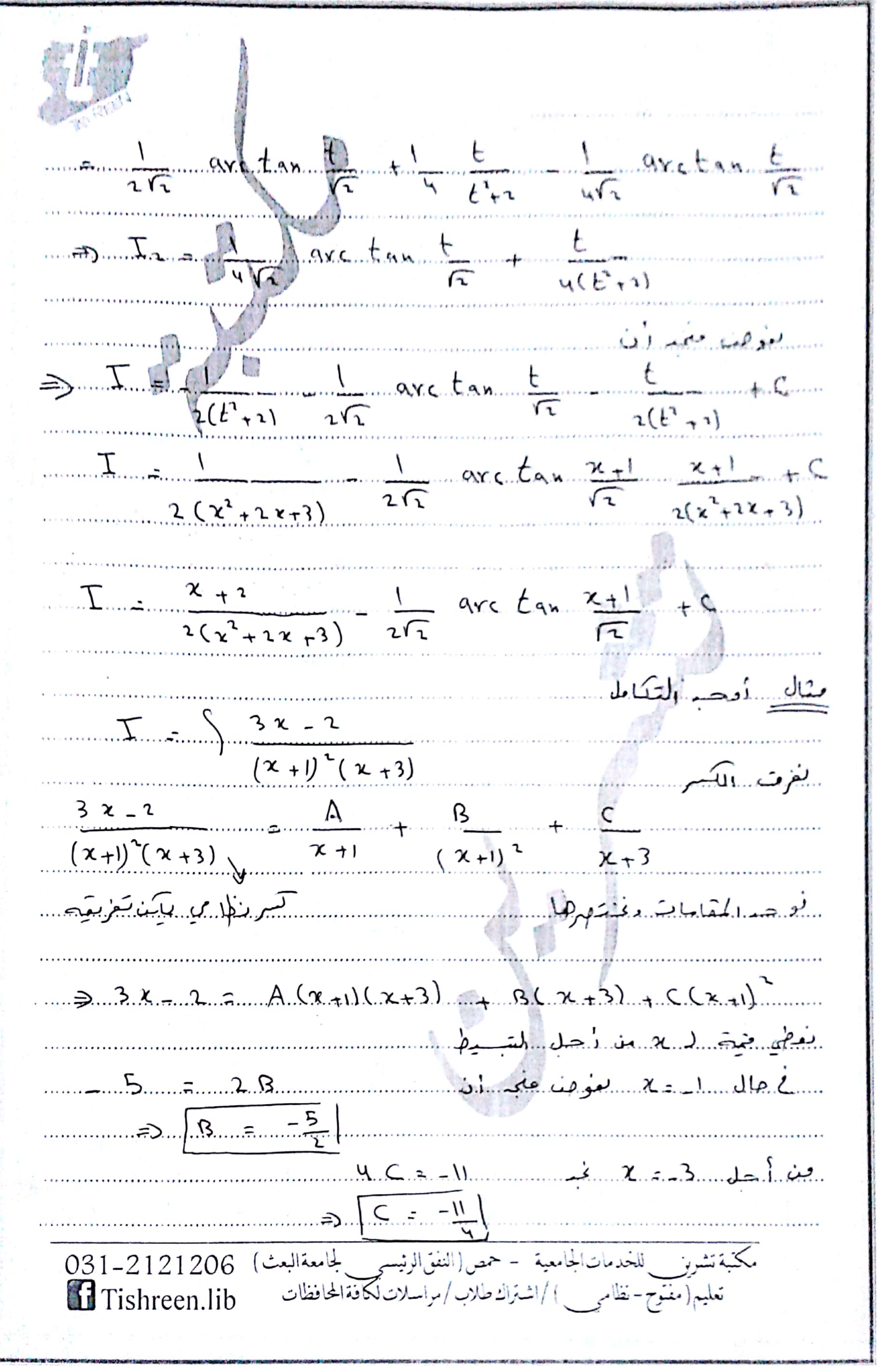
$du = dt \Leftarrow u = t$

$v = -\frac{1}{t^2+2} \Leftarrow dv = \frac{2t}{(t^2+2)^2}\,dt$

$$\int \frac{t\cdot 2t}{t^2+2} = -t\,\frac{1}{t^2+2} + \int \frac{1}{t^2+2}$$

نعوض في I_2

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{t^2+2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$$



$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \frac{t}{t^2+2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{4(t^2+2)}$$

نعوض منه أن

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2(t^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{t}{2(t^2+2)} + C$$

$$I = \frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + C$$

$$I = \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

مثال أوجد التكامل

$$I = \int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}$$

نفرق الكسر

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

كسر نظامي يمكن تجزيئه

نوجد المقامات ونختصرها

$$\Rightarrow 3x-2 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2$$

نعطي قيمة لـ x من أجل التبسيط

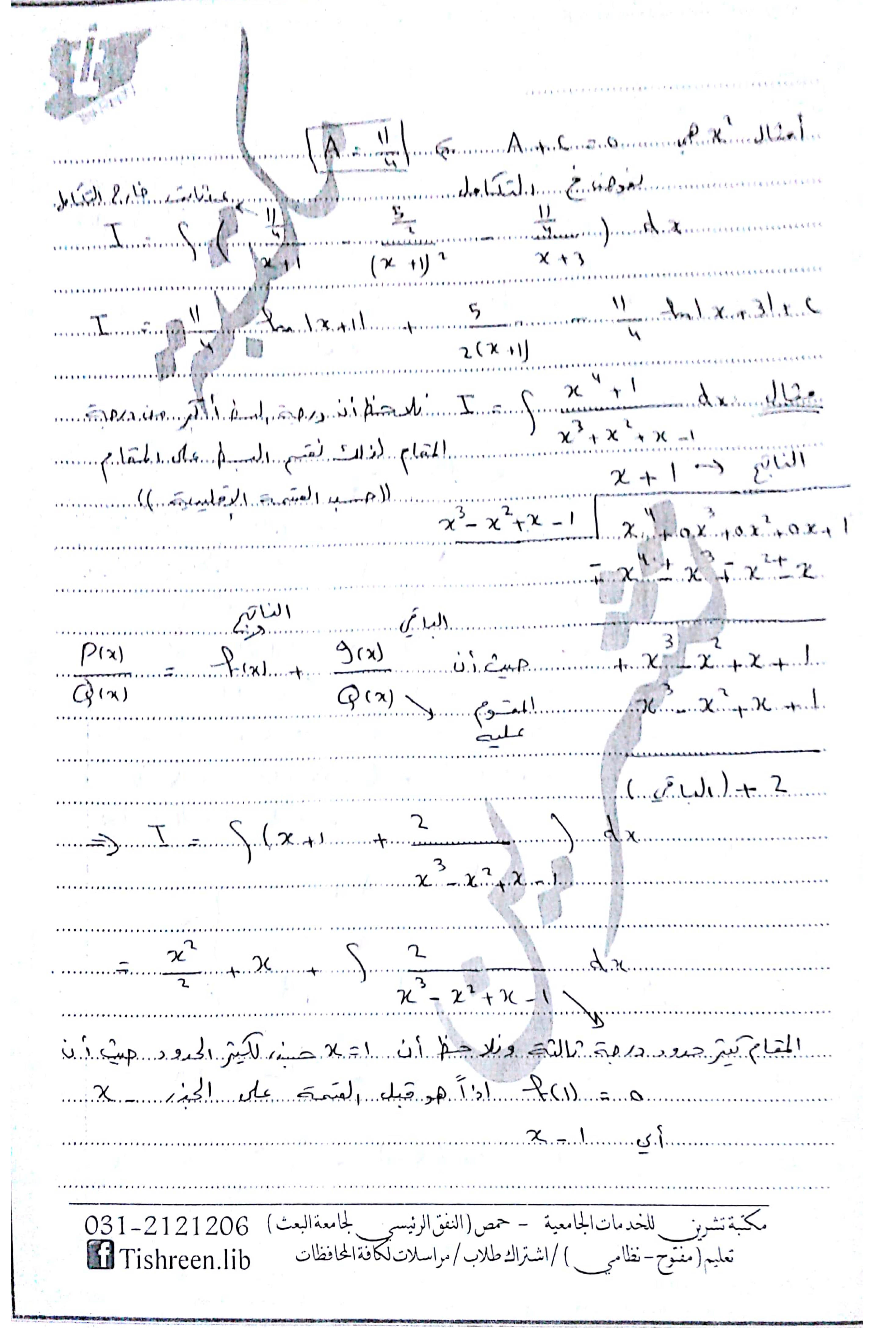
في حال $x = -1$ نعوض فنجد أن

$$-5 = 2B$$

$$\Rightarrow \boxed{B = -\frac{5}{2}}$$

من أجل $x = -3$ نجد $4C = -11$

$$\Rightarrow \boxed{C = -\frac{11}{4}}$$



أمثال x^2 فيه: $A + C = 0$ ثم $\boxed{A = \frac{11}{4}}$

نعوض في التكامل — عبارات خارج التكامل

$$I = \int \left(\frac{\frac{11}{4}}{x+1} - \frac{\frac{5}{2}}{(x+1)^2} - \frac{\frac{11}{4}}{x+3} \right) dx$$

$$I = \frac{11}{4} \ln|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4} \ln|x+3| + c$$

مثال: $I = \int \frac{x^4+1}{x^3+x^2+x-1} \, dx$ نلاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام لذلك نقسم البسط على المقام ((حسب القسمة الإقليدية))

الناتج ← $x + 1$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ \mp x^4 \pm x^3 \mp x^2 \pm x & \\ \hline + x^3 - x^2 + x + 1 & \\ x^3 - x^2 + x + 1 & \\ \hline (\text{الباقي}) + 2 & \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{g(x)}{Q(x)}$$

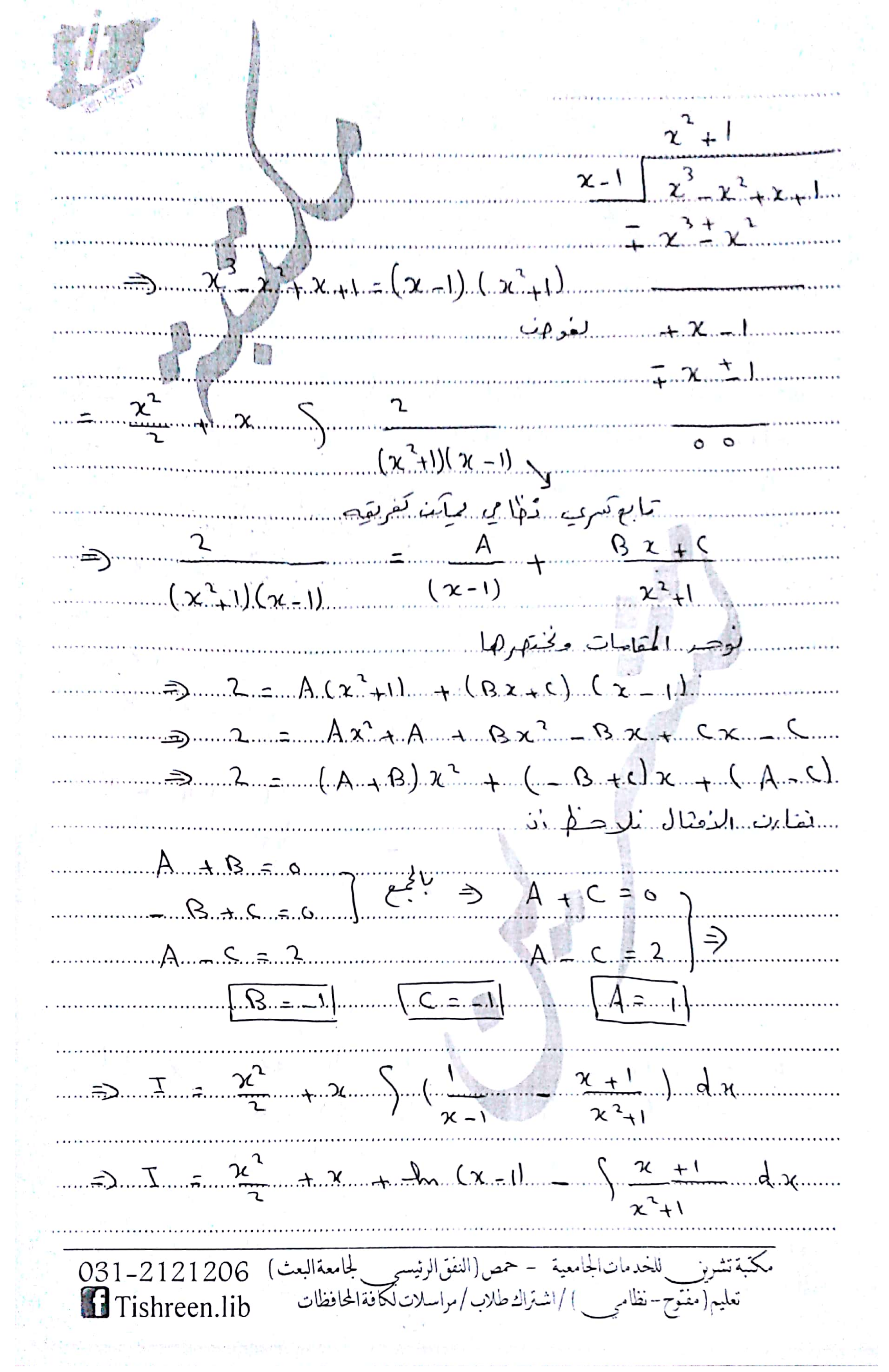
حيث أن $f(x)$ الناتج، $g(x)$ الباقي، $Q(x)$ المقسوم عليه

$$\Rightarrow I = \int \left(x + 1 + \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1} \, dx$$

المقام كثير حدود درجة ثالثة ونلاحظ أن $x = 1$ جذر لكثير الحدود حيث أن $f(1) = 0$ إذاً هو يقبل القسمة على الجذر $x -$

أي $x - 1$



$$\begin{array}{r|l} x-1 & x^3-x^2+x+1 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \\ \hline & +x-1 \\ & \mp x \pm 1 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array} \qquad \text{quotient: } x^2+1$$

$\Rightarrow x^3-x^2+x+1=(x-1)(x^2+1)$

نعوض

$= \frac{x^2}{2}+x \int \frac{2}{(x^2+1)(x-1)}$

تابع كسري نظامي نجزئه كتفريقه

$\Rightarrow \frac{2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

نوحد المقامات ونختصرها

$\Rightarrow 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$

$\Rightarrow 2 = Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C$

$\Rightarrow 2 = (A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)$

نقارن الأمثال نلاحظ أن

$A+B=0$
$-B+C=0$] بالجمع $\Rightarrow A+C=0$
$A-C=2$ $\qquad\qquad A-C=2$ $\Rightarrow$

$\boxed{B=-1}$ $\boxed{C=-1}$ $\boxed{A=1}$

$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}+x \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right) dx$

$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1) - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x+1) - \int \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

نضرب ونقسم على 2

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

نعلم أن: $\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x$

وأيضاً: $\int \frac{2x}{x^2+1} = \ln(x^2+1)$

حيث البسط مشتق المقام (نعوض)

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan x + C$$

تمرين وظيفة أوجد تكامل $I = \int \frac{1}{(e^x-1)^2}$

فكرة الحل: في البداية نضرب ونقسم بـ e^x

ثم نجري تغيير المتحول ونفرض $e^x = t \Leftarrow dt = e^x dx$

<< انتهت المحاضرة الرابعة >>

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >>

<< إعداد: فاطمة الشميني >>